tentamen 9,8+0,8 $\boxed{10}$

Statistische Fysica 12/4/2010

dubbelvel 1/9

9

Opgave 1

a) * i) De a priori kans dat een geïsoleerd systeem zich in een bepaalde microtoestand bevindt is voor alle mogelijke microtoestanden van het systeem gelijk.

* ii) De evenwichtstoestand van een systeem is de macrotoestand van het systeem waarmee het grootste aantal microtoestanden correspondeert.

b) $S = k \ln \Omega$

S is de entropie, k de constante van Boltzmann en Ω is het aantal mogelijke microtoestanden die corresponderen met de gegeven macrotoestand waarvoor we de entropie willen uitrekenen.

c) Beschouw ~~een~~ het geïsoleerd systeem van deze opgave.

Evenwicht betekent dat Ω maximaal is de evenwichtstoestand is de macro-

toestand met een maximale ~~[illegible]~~ Ω volgens
dit [illegible], maar zonder [illegible] [illegible].
is deze [illegible] weinig [illegible], omdat je niet
dan niet zou weten over de samenstelling.

nu is Ω maximaal $\Longleftrightarrow$ S maximaal,
volgt rechtstreeks uit $S = k \ln \Omega$

$\Rightarrow dS = 0$ in evenwicht.

de [illegible] tussenwand laat alleen energie door
dus E, V, N, N_1, N_2, V_1, V_2 zijn vast,
dus

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E_1} \cancel{dE_1} + [illegible]$$

als er een hoeveelheid energie dE van deel 1 naar deel 2 stroomt.

dus $dE \neq 0$, [illegible] $\frac{\partial S}{\partial E_1} = 0$

nu is:

$$\frac{\partial S}{\partial E_1} = \frac{\partial (k \ln \Omega)}{\partial E_1} = \frac{\partial (k \ln (\Omega_1 \cdot \Omega_2))}{\partial E_1} =$$

$$\frac{\partial (k \ln \Omega_1)}{\partial E_1} + \frac{\partial (k \ln \Omega_2)}{\partial E_1} =$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2}{\partial E_1} = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \cdot \frac{\partial E_2}{\partial E_1} =$$

[illegible] $\frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2} = 0$

want volgens de postulaten geldt dat $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$
(Ω is aantal mogelijke microtoestanden van het hele systeem, Ω_1 van deel 1 en Ω_2 van deel 2, $\Omega = \Omega_1 \cdot \Omega_2$ volgt dan uit postulaat 2) ℓ'

dus:
$$\frac{\partial S_1}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2}{\partial E_2}$$

deze zijn immers constant.

dus def: $\frac{1}{T_i} = \frac{\partial S_i}{\partial E_i}\Big|_{V_i, N_i}$ als de temperatuur.

dan geldt bij evenwicht: $T_1 = T_2$

PS: elke andere definitie v.d. vorm $f(T_i) = \frac{\partial S_i}{\partial E_i}$ (en f injectief) zou ook werken, maar met deze def. komt de temperatuur overeen met de schaal van Celsius, op de keuze van het nulpunt na.

de partiële afgeleide is naar E_1, want $S = S(E, V, N, E_1, V_1, N_1)$ is voldoende om S te specificeren en behalve E_1 is alles constant.

tent Stat. fys. 12/4/2010

deeltvel 2/9

Opgave 2 (9)

a) de toestandssom van 1 deeltje is:

$$Z = \sum_{E_r} g(E_r) e^{-\beta E_r} =$$

$$= 1 + 2 \cdot e^{-\beta \Delta} = 1 + 2 e^{-\Delta/kT}$$

en de gemiddelde energie $\bar{E}$ van 1 deeltje is:

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -1 \cdot \frac{1}{1+2e^{-\beta\Delta}} \cdot -\Delta \cdot 2 e^{-\beta\Delta}$$

$$= \frac{2\Delta e^{-\beta\Delta}}{1+2e^{-\beta\Delta}} = \frac{2\Delta}{2+e^{\beta\Delta}}$$

als we de interactie tussen de deeltjes verwaarlozen, is de totale energie van het systeem dan

$$E = N\bar{E} = \frac{2N\Delta}{2+e^{\beta\Delta}}$$

maar uiteraard geldt ook dat $E = n\Delta$

dus:

$$n\Delta = \frac{2N\Delta}{2+e^{\beta\Delta}} \quad \text{ofwel:}$$

$$\rho^{n} = \frac{2N}{2+e^{\Delta/kT}} \qquad \left(\beta = \frac{1}{kT}\right).$$

deze methode is gerechtvaardigd, omdat het systeem in contact staat met een warmtebad van temperatuur T.

b) beschouw nu alleen het verblijven van n deeltjes in de aangeslagen toestand.

neem hiervan 1 deeltje waarvan dus al zeker is dat hij in de aangeslagen toestand zit en reken de partitiefunctie van dit deeltje uit. def. echter hier het nulpunt v.d. energie als de aangeslagen toestand, terwijl de grondtoestand in vraag a het nulpunt was.

de toestandssom van 1 deeltje wordt dan:

$$Z_1 = \sum_{E_r} g(E_r)\, e^{-\beta E_r}$$

een deeltje ~~[illegible]~~ met magnetisch moment μ heeft 2 toestanden in een magneetveld:

aligned: met energie $-\mu B$

anti-aligned met energie $+\mu B$

dus: $Z = e^{-\frac{\mu B}{kT}} + e^{\frac{\mu B}{kT}} =$ (beide ontaardingsgraad 1).

$2\cosh(x)$ met $x = \frac{\mu B}{kT}$; $\beta = \frac{1}{kT}$.

volgens de def.

en $\bar{\mu} = \frac{1}{Z}\left(\sum_r \mu(r) e^{-\beta E_r}\right) =$

$\frac{1}{2\cosh(x)}\left(\mu \cdot e^{\frac{\mu B}{kT}} + (-\mu) e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right) =$

$\mu \tanh(x)$; $x = \frac{\mu B}{kT}$.

aangezien het volume n deeltjes heeft, is de magnetisatie dan eenvoudig gelijk aan:

$M = \frac{n\bar{\mu}}{V} = \frac{n\mu}{V} \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$.

als we de interactie tussen de deeltjes verwaarlozen.

c) $\cancel{\mu B \ll kT}$:

$$\mu B \ll kT \Rightarrow \frac{\mu B}{kT} \ll 1.$$

dan $x = \frac{\mu B}{kT} \ll 1$ en

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \approx$$ 1e Orde Taylor.

$$\frac{(1+x) - (1-x)}{(1+x) + (1-x)} = \frac{2x}{2} = x$$

dus als $\mu B \ll kT$, dan is

$$M \simeq \frac{n\mu}{V} \cdot \frac{\mu B}{kT} = \frac{n\mu^2 B}{kTV}$$

dus:

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{n\mu^2\mu_0}{kTV}$$

tent. Stat. Fys. 12/4/2010

dubbelvel 3/9

Vervolg opgave 2

c) echter, het vervelende is dat n ook van T afhangt, de afhankelijkheid wordt gegeven door het antw. op vraag a:

$$\chi = \frac{n(T)\mu^2\mu_0}{kTV} = \frac{2N}{1+e^{\Delta/kT}} \cdot \frac{\mu^2\mu_0}{kTV}$$

$$= \frac{2N\mu^2\mu_0}{kV} \cdot \frac{1}{T(1+e^{\Delta/kT})}$$

dus het maximum van χ ligt bij de temperatuur waarvoor

$$\frac{\partial\chi}{\partial T} = 0 \qquad \text{welnu: z.o.z.}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial T} = \frac{2N\mu^2\mu_0}{kV} \cdot \frac{-1}{T^2(2+e^{\Delta/kT})^2} \cdot$$

$$\left((2+e^{\Delta/kT}) + T \cdot \frac{-\Delta}{kT^2}\, e^{\Delta/kT}\right) = 0$$

dan impliceert $\frac{\partial \dots}{\partial T} = 0$ dat

$$(2+e^{\Delta/kT}) - \frac{\Delta}{kT}\, e^{\Delta/kT} = 0$$

stel: $x = \frac{\Delta}{kT}$, dan moet gelden:

$$2 + e^{x} - x e^{x} = 0$$

$$2e^{-x} + 1 - x = 0$$

$$x - 1 = 2e^{-x}$$

deze vergelijking is niet met de hand op te lossen, dus zullen we de oplossing afschatten.

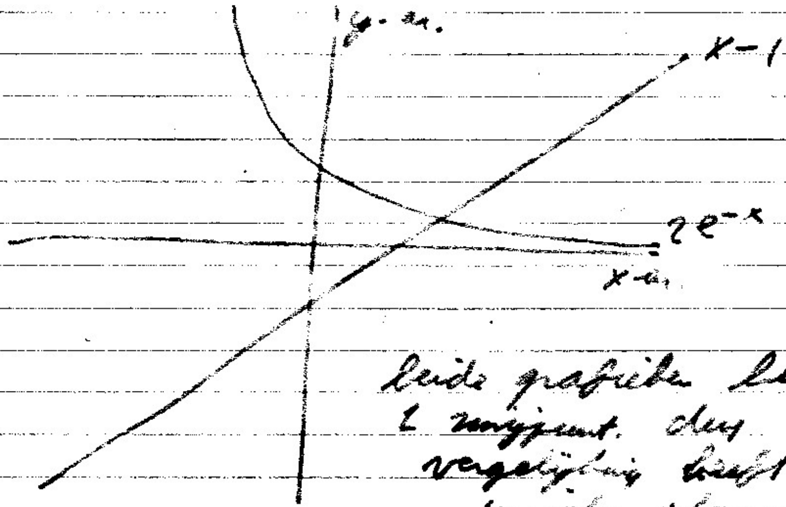
~~Stel [illegible] $x = \frac{1}{b}$ is de oplossing, dat is:~~

~~$\frac{\Delta}{kT} = b$, dus~~

Stel echter dat $x = \frac{1}{b}$ een oplossing van de vergelijking is.

dan is $x = \frac{\Delta}{kT} = \frac{1}{b} \Rightarrow T = \frac{b\Delta}{k}$

dan als we een oplossing van de vergelijking kunnen vinden, vinden we b ook, want de vergelijking heeft 1 unieke oplossing:



beide grafieken hebben 1 snijpunt, dus de vergelijking heeft 1 unieke oplossing.

we schatten nu de oplossing numeriek af m.b.v. de methode van bisectie:

$x = 1 \Rightarrow 1-1 < 2e^{-1}$

$x = 2 \Rightarrow 2-1 > 2e^{-2}$

$x = 1\frac{1}{2} \Rightarrow 1\frac{1}{2}-1 > 2e^{-1\frac{1}{2}}$

$x = 1{,}25 \Rightarrow 1{,}25-1 < 2e^{-1{,}25}$

$x = 1{,}375 \Rightarrow 1{,}375-1 < 2e^{-1{,}375}$

203.

$x = 1{,}45$: $1{,}45 - 1 < 2e^{-1{,}45}$

$x = 1{,}46$: $1{,}46 - 1 < 2e^{-1{,}46}$

$x = 1{,}47$: $1{,}47 - 1 > 2e^{-1{,}47}$

Neem als oplossing dus:

$$x \simeq 1{,}465$$

dan is $b = \frac{1}{x} \simeq 0{,}69$

tent Stat. Fys. 12/4/2010

(8) dubbelvel 4/9

Opgave 3

a)
$$Z = \sum_{E_r} g(E_r)\, e^{-\beta E_r}$$

$g(E_r) = 2r+1$ (gegeven, ontaardingsgraad).

$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} r(r+1)$ gegeven, energie.

dus:
$$Z = \sum_r (2r+1)\, e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2I} r(r+1)}$$

b) $kT \ll \frac{\hbar^2}{2I} \Leftrightarrow$ dan de exponent v.d. toestandssom valt zeer snel af naar nul, zeker door de $r(r+1)$, dus we kunnen dan net zo goed alle niveaus behalve $r=0$ en $r=1$ verwaarlozen;

als we de $r=2$ - term of de $r=1$ term delen, krijgen we: 203.

$$\frac{(2\cdot 2+1)\, e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I}\cdot 2\cdot(2+1)}}{(2\cdot 1+1)\, e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2I}\cdot 1\cdot(1+1)}} =$$

$$\frac{5 e^{-6x}}{3 e^{-2x}} = \frac{5}{3} e^{-4x}$$

met $x = \frac{\beta \hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{1}{kT}$

maar

$kT << \frac{\hbar^2}{2I}$; dus $x >> 1$

dus $\frac{5}{3} e^{-4x} << 1$

dus het verwaarlozen is toegestaan.

dan:

$$Z \simeq 1 + (2\cdot 1+1)\, e^{-\frac{\beta\hbar^2}{2I}\cdot 1\cdot(1+1)} =$$

$$1 + 3 e^{-\frac{\beta \hbar^2}{I}} ,$$

en

$$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \Rightarrow$$

$$\bar{E} = \frac{-1}{1+3e^{-\beta\hbar^2/I}} \cdot 3 \cdot -\frac{\hbar^2}{I} e^{-\beta\hbar^2/I} =$$

$$\frac{\cancel{4}\, 3(\hbar^2/I)\, e^{-\beta\hbar^2/I}}{1+3e^{-\beta\hbar^2/I}} =$$

$$\frac{3\hbar^2/I}{e^{\beta\hbar^2/I}+3} = \frac{3\hbar^2/I}{e^{\hbar^2/(kTI)}+3}$$

a

$$C_v = \frac{đQ}{dT}\Big|_v = \frac{d\bar{E}}{dT}\Big|_v \qquad (dE = đQ + đW;\ V = \text{const} \Rightarrow đW = 0;\ dE = đQ)$$

$$= \frac{-3\hbar^2/I}{(e^{\hbar^2/(kIT)}+3)^2} \cdot e^{\frac{\hbar^2}{kTI}} \cdot -\frac{\hbar^2}{kIT^2} =$$

$$\frac{3\hbar^4/(kI^2T^2)\, e^{\hbar^2/(kTI)}}{(e^{\hbar^2/(kIT)}+3)^2} =$$

$$\frac{3k x^2 e^x}{(e^x+3)^2} \text{ met } x = \frac{\hbar^2}{kT\cdot I}$$

9

~~Als $\frac{1}{2}kT \gg \frac{\hbar^2}{2I}$ t.g.v. de energie-niveau's van het molecuul zo dicht bij elkaar, dat we de som van begin. vervangen door een integraal :~~

dus

$$C_v \simeq \frac{3k\,x^2 e^x}{(e^x+3)^2} \; ; \; x = \frac{\hbar^2}{kT\cdot I}$$

$$kT \ll \frac{\hbar^2}{I} \Rightarrow x \gg 1$$

dus $e^x + 3 \simeq e^x \quad (e^x \gg 3)$

$$\Rightarrow \underline{C_v \simeq 3k\,x^2 e^{-x}}$$

$$x = \frac{\hbar^2}{kT\cdot I} \gg 1.$$

tent. Stat. Fys. 12/4/2010

dubbelvel 5/9

Opgave 3 (vervolg)

c) als $kT << \frac{\hbar^2}{2I}$, dan liggen de

energieniveau's zo dicht bij elkaar, dat we de som mogen vervangen door een integraal;

substitueer x (een continue variabele) voor l (een discrete variabele), dan wordt Z:

$$Z \approx \int_0^\infty (2x+1)\, e^{-\frac{\beta \hbar^2}{2I} \cdot x \cdot (x+1)}\, dx.$$

substitueer $y = \frac{\beta \hbar^2}{2I}$

en $u = x \cdot (x+1)$

dan is $u = \kappa(\kappa+1) = \kappa^2+\kappa$

dus $du = \frac{du}{d\kappa} \cdot d\kappa =$

$(2\kappa+1)\, d\kappa$

dan onze integraal wordt:

$$Z = \int_0^\infty e^{-\gamma u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[e^{-\gamma u}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[0-1\right] = \frac{1}{\gamma} = \frac{2I}{\beta \hbar^2} = \frac{2I}{\hbar^2} \cdot kT$$

dan is

$$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\beta \hbar^2}{2I} \cdot -\frac{2I}{\hbar^2 \beta^2} =$$

$$\frac{1}{\beta} = kT$$

Klopt met equipartitie theorie

dus: $C_v = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_v = N \frac{\partial \overline{E}}{\partial T}\Big|_v = N k$.

dan is $u = x(x+1) = x^2 + x$

dus $du = \frac{du}{dx} \cdot dx =$

$(2x+1)\,dx$

dus onze integraal wordt:

$$Z = \int_0^\infty e^{-\gamma u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[e^{-\gamma u}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\left[0 - 1\right] = \frac{1}{\gamma} = \frac{2I}{\beta\hbar^2} = \frac{2I}{\hbar^2} \cdot kT$$

dan is

$$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\beta\hbar^2}{2I} \cdot -\frac{2I}{\hbar^2\beta^2} =$$

$$\frac{1}{\beta} = kT$$

Klopt met equipartitie theorie

dus: $C_v = \frac{\partial Q}{\partial T}\Big|_v = N\frac{\partial \overline{E}}{\partial T}\Big|_v = Nk$.

Opgave 4 (9)

a) deze vergelijking is een relatie tussen entropie- en volumeverandering van een stof bij een fase-overgang en de vorm van de evenwichtskromme tussen de fasen in het P, T vlak.

$\frac{dP}{dT}$ is de richtingscoefficient van een

3 kromme in het P, T, vlak (druk-temperatuur vlak)

van de stof. ~~deze kromme~~

op deze kromme zijn twee fasen van deze stof met elkaar in evenwicht.

ΔS en ΔV zijn de entropie- en volumeverandering van een hoeveelheid stof die van de ene fase naar de andere fase ~~over~~ gaat.

ΔS en ΔV zijn extensief, maar $\frac{dP}{dT}$ is intensief, dus moeten ΔS en ΔV op dezelfde hoeveelheid stof betrekking hebben!

deze vergelijking beschrijft dan dus hoe de druk zal veranderen t.g.v. een verandering in de temperatuur bij dus het fase-evenwicht in stand blijft.

b) gegeven, bij twee fasen 1, 2 geldt:

$$g_1(T,P) = g_2(T,P)$$

⇒ Taylor – expansie 1e orde;

$$g_1(T+dT, P+dP) =$$
$$g_1(T,P) + \frac{\partial g_1}{\partial T} dT + \frac{\partial g_1}{\partial P} dP$$
$$g_2(T+dT, P+dP) =$$
$$g_2(T,P) + \frac{\partial g_2}{\partial T} dT + \frac{\partial g_2}{\partial P} dP$$

en $g_1(T,P) = g_2(T,P)$ impliceert dat ~~voor een infinitesimaal kleine verandering dT dP het evenwicht nog steeds zal gelden:~~

$$g_1(T+dT, P+dT) = g_2(T+dT, P+dP)$$

mits dP, dT een infinitesimaal kleine verandering LANGS de evenwichtslromme v.d. fasen 1, 2 in het P, T vlak is.

vervolg opgave 4b

tent. Stat. Fys. 12/4/2010 dubbelvel 6/9

dus:

$$g_1(T,P) + \frac{\partial g_1}{\partial P}dP + \frac{\partial g_1}{\partial T}dT =$$

$$g_2(T,P) + \frac{\partial g_2}{\partial P}dP + \frac{\partial g_2}{\partial T}dT$$

& $g_1(T,P) = g_2(T,P)$ dus:

$$\frac{\partial g_1}{\partial P}dP + \frac{\partial g_1}{\partial T}dT = \frac{\partial g_2}{\partial P}dP + \frac{\partial g_2}{\partial T}dT$$

of wel:

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial P} - \frac{\partial g_2}{\partial P}\right)dP = \left(\frac{\partial g_2}{\partial T} - \frac{\partial g_1}{\partial T}\right)dT$$

nu is g de Gibbs-vrije energie per deeltje en volgende thermodynamica geldt:

$$S = -\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{P,N} \quad \& \quad V = +\left.\frac{\partial G}{\partial P}\right|_{T,N}$$

en $G = N \cdot g$. (g is G per deeltje)

dus: we krijgen:

$$\left(-\frac{S_2}{N} + \frac{S_1}{N}\right)dT = \left(\frac{V_1}{N} - \frac{V_2}{N}\right)dP$$

vermenigvuldigen met $-N$ levert:

$$(S_2 - S_1)\, dT = (V_2 - V_1)\, dP$$

nu is $\Delta S = S_2 - S_1$ & $\Delta V = V_2 - V_1$
(uiteraard)

dus: $\Delta S \cdot dT = \Delta V \cdot dP$

oftewel: $\boxed{\dfrac{dP}{dT} = \dfrac{\Delta S}{\Delta V}}$

3 q.e.d.

c) fase-overgang bij isotherm, dus:

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 \delta Q = \frac{1}{T}\,\Delta Q.$$

en $\Delta Q = \Delta H$ in dit geval, dus

$$\Delta_{fus} S = \frac{\Delta_{fus} H}{T} = \frac{0{,}72 \text{ kJ mol}^{-1}}{63{,}18 \text{ K}}$$

$$= 11{,}4 \text{ J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$$

en $\Delta_{vap} S = \frac{\Delta_{vap} H}{T} = \frac{5{,}56\ kJ\,mol^{-1}}{63{,}15\ K} =$

$88{,}0\ J\,K^{-1}\,mol^{-1}$

en aangezien we op het tripelpunt zitten is de temperatuur … van de verdamping dezelfde, dus is

$S_{sub} = S_{vap} + S_{fus} = \underline{99{,}4\ J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$

3 dit is de entropieverandering bij sublimatie op het tripelpunt

~~Opgave 5~~

~~a). $N = \int_0^\infty g(\varepsilon)\,\bar{n}(\varepsilon)\,d\varepsilon =$~~

~~$\int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\,d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$ is de vergelijking die ons … een relatie geeft tussen de chemische potentiaal en het aantal deeltjes N.~~

tent Stat. Fys. 12/4/2010

dubbelvel 7/9

Opgave 5 (9)

b) $N = N_1 + N(\varepsilon > 0)$ met $N_1 = N(\varepsilon = 0)$

dat dit geldt is triviaal.

nu is

$dN(\varepsilon > 0) = \bar{n}(\varepsilon) \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon$

occupation of a 1 state times the density of states gives all particles ~~...~~ with energy between ε, $\varepsilon + d\varepsilon$.

dus:

$N = N_1 + N(\varepsilon > 0) =$

$N_1 + \int_0^\infty \bar{n}(\varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon =$

$N_1 + \int_0^\infty \frac{C \varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$.

$g(\varepsilon) d\varepsilon$ gegeven &

$\bar{n}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$

de BE-distributie

we moeten $N_1 = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$ apart meenemen

in de uitdrukking van N_g, omdat $f(\varepsilon)d\varepsilon$ de staat met $\varepsilon = 0$ gewicht nul geeft. deze staat wordt dus verwaarloosd in de integraal, maar als $T \to 0$ zal een macroscopische grootte v.d. deeltjes in deze staat gaan zitten en mogen we deze dus beslist niet verwaarlozen, we moeten N_1 dus apart meenemen;

$$N_1 = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \; ; \text{ want } \bar{n}(\varepsilon = 0) = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$$

BE-distributie

en de grondtoestand is nooit ontaardt volgens de kwantummechanica

a) als $T \to 0$, dan zullen alle deeltjes in de toestand met $\varepsilon = 0$ gaan zitten, dus

$$N_1 = \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} = \bar{n}(\varepsilon = 0) \to N.$$

$N_1 = \bar{n}(\varepsilon = 0)$ BE-luchtcle, want kwantummechanica: zegt dat de grondtoestand nooit ontaard is.

dus als $T \to 0$, dan

$$\bar{n}(\varepsilon = 0) = N_1 \to N.$$

dus $$N \simeq \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$$

~~maar deeltjes~~ Dat

dit getal $N = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu}-1}$ is zeer groot,

een macroscopisch aantal deeltjes; ongeveer 10^{23}, dus

$e^{-\beta\mu}-1$ is bijna nul, dus als $T \to 0$!

$$e^{-\beta\mu} \simeq 1 \Rightarrow$$

Taylor-expansie:

$$e^{-\beta\mu} \simeq 1-\beta\mu.$$

dus.

$$N \simeq \frac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \simeq \frac{1}{(1-\beta\mu)-1} = \frac{1}{-\beta\mu}$$

dus $\mu = \dfrac{1}{-\beta N} = -\dfrac{kT}{N}$ als $T \to 0$

?

andat $N_1 = \dfrac{1}{e^{-\beta\mu}-1} \sim N$ dan te groot wordt.

tent Stat. Fys. 12-4-2010

<u>Vervolg opgave 5</u> dubbelvel 8/9

c). zie b:

$$N = N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

nu is $T = T_c$ gedef dat

dan het kenmerk $\mu = 0$.

dus:

$$N = N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT_c} - 1}$$

substitueer nu $x = \dfrac{\varepsilon}{kT_c}$.

$$\varepsilon^2 = (kT_c x)^2$$

$$d\varepsilon = kT_c dx$$

~~dan de integraal wordt~~

=).

~~gegeven worden: als $T < T_c$, dan is~~

$$\mu = -\frac{kT}{N}$$

~~dus:~~

$$N(\varepsilon > 0) = \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} =$$

$$\int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon + 1/N}-1}$$

dus:

$$N = N_1 + C\int_0^\infty \frac{(kT_c x)^2 \cdot kT_c\, dx}{e^x - 1} =$$

$$N_1 + (kT_c)^3\, C \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{e^x - 1} =$$

constant & integraal

$$N_1 + (kT_c)^3\, C \cdot 2{,}404$$

nu wordt N_1 pas macroscopisch bezet als $T < T_c$; is $T = T_c$ is N_1 (staat $\varepsilon = 0$) nog net $\approx$ deel.

dan mogen we N_1 hier nog niet verwaarlozen,
dan T_c kunnen we dus doen v:

$$N = 2,404 \cdot C \cdot (kT_c)^3$$

dus $T_c = \frac{0.746}{k}\left(\frac{N}{C}\right)^{1/3}$

nu is verder gegeven dat als $T < T_c$, dan is $\mu = \frac{-kT}{N}$ dan

$$N = N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} =$$

$$N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon+1/N}-1} =$$

$$N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{\sqrt[N]{e}\cdot e^{\beta\varepsilon}-1} \approx$$

$$N_1 + \int_0^\infty \frac{C\varepsilon^2\, d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}.$$

tent stat. fys. 12/4/2010

dubbelvel 9/9.

want N is grootte orde 10^{23}, dus

$\sqrt[N]{e^{?}} \approx 1$. mogen we [illegible]

substitueren we $x = \beta \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{x}{\beta}$

& $d\varepsilon = \frac{dx}{\beta}$

dus:

$$N = N_i + \int_0^\infty \frac{C \cdot (x/\beta)^2 \cdot dx/\beta}{e^x - 1} =$$

$$N_i + \frac{C}{\beta^3} \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{e^x - 1} =$$

$$N_i + 2{,}404 \cdot (kT)^3 \cdot C$$

dus (def N_1, $N(\varepsilon > 0)$) $=$).

$$N(\varepsilon > 0) = 2{,}404 \cdot C \cdot (kT)^3 \quad (T < T_c).$$

$$\& \; N = 2{,}404 \cdot C \cdot (kT_c)^3$$

$$\text{dus} \quad \frac{N(\varepsilon > 0)}{N} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$

$$\& \quad \frac{N_1}{N} = 1 - \frac{N(\varepsilon > 0)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3$$